

Esempio: il problema dello zaino

$$\begin{aligned}\max & 12x_1 + 9x_2 + 10x_3 \\ & 8x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 15 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}\end{aligned}$$

Quante sono le soluzioni del problema ?

Sono una per ciascun sottoinsieme S dell'insieme $N = \{1,2,3\}$ di oggetti, ad eccezione degli insiemi che superano la capacità del contenitore.

Vi sono quindi al più $2^3 = 8$ soluzioni. Esse **sono in numero esponenziale** rispetto alla dimensione $n=3$ del problema.

Questo significa che **non è possibile enumerarle esplicitamente** tutte (se non per istanze con n piccolo).

Nei casi realistici occorre adottare una strategia più sofisticata.

1

Il metodo di Branch and Bound

Idea:

eseguire una enumerazione **implicita** delle soluzioni

Tecnica:

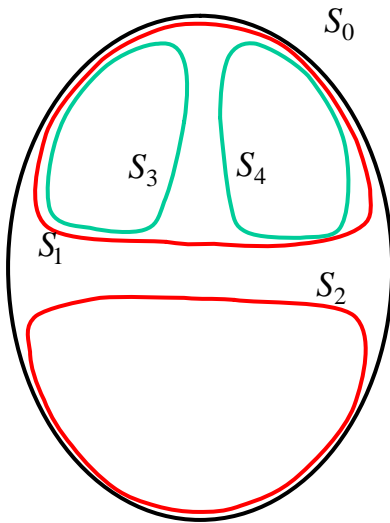
- (a) generare una **partizione** ricorsiva della **regione ammissibile (branching)**
- (b) risolvere esplicitamente o implicitamente (**bounding**) i **sottoproblemi** generati dalla partizione

Rappresentazione:

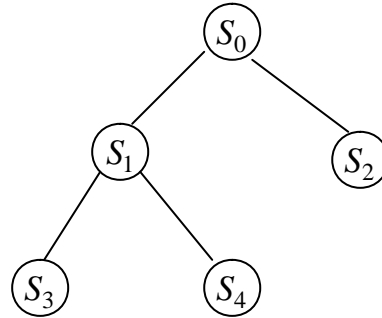
- (a) struttura ad albero per la **partizione**
- (b) etichette sui nodi per i **bounds**

2

Regione ammissibile



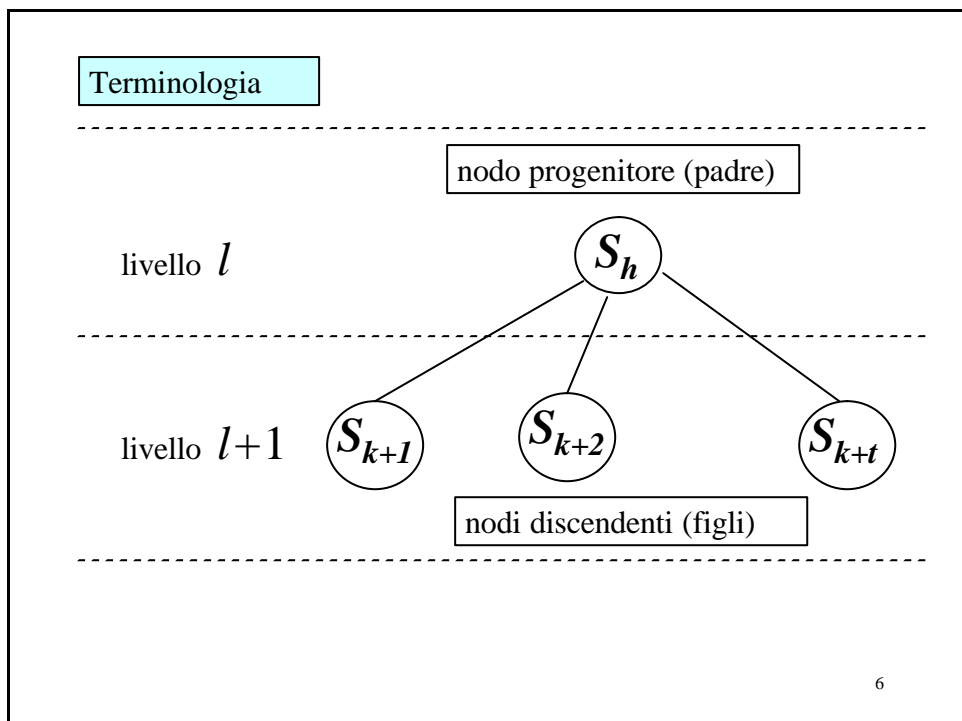
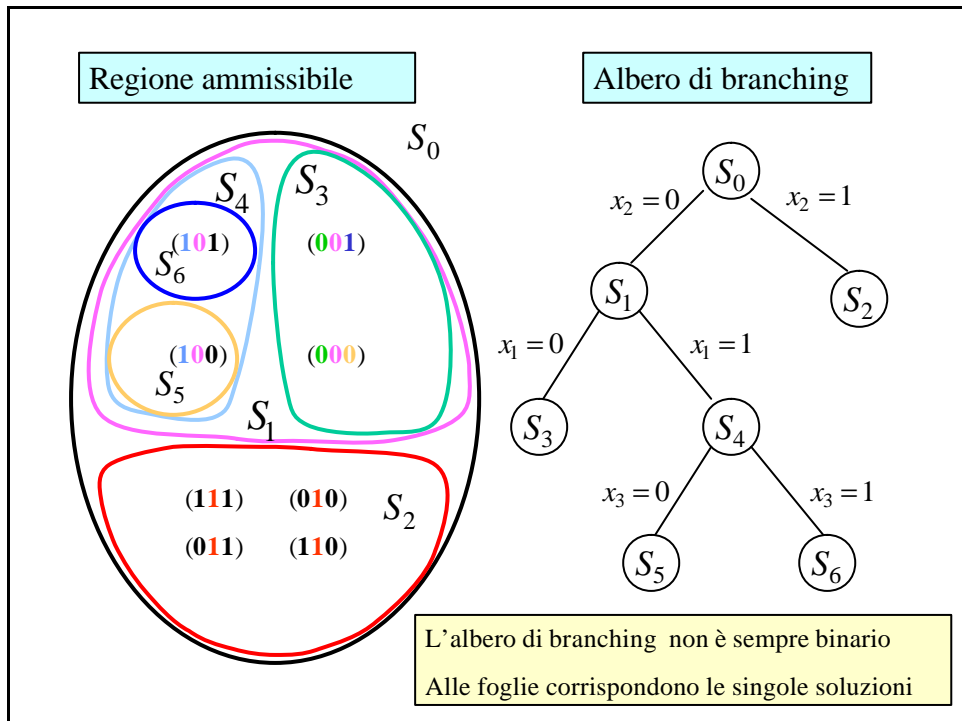
Albero di branching



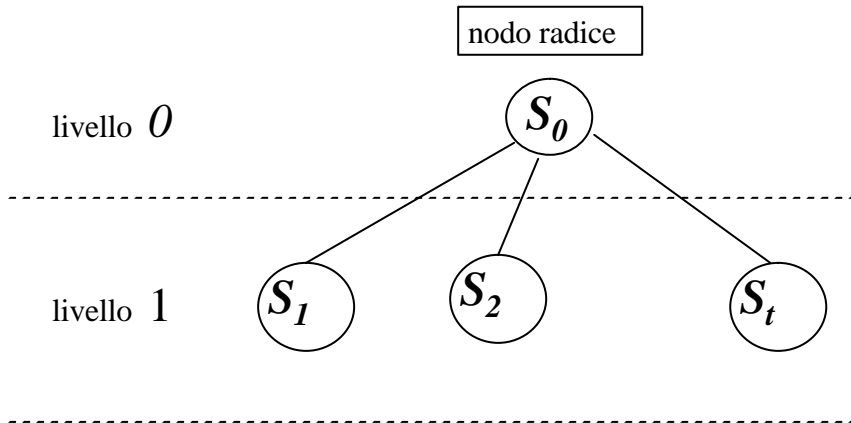
3

Si consideri ad esempio il problema dello zaino appena visto
L'insieme delle soluzioni possibili può essere rappresentato
mediante vettori booleani a 3 componenti

4



Terminologia



Quanti nodi ha l'albero?

Almeno quante sono le soluzioni ammissibili

7

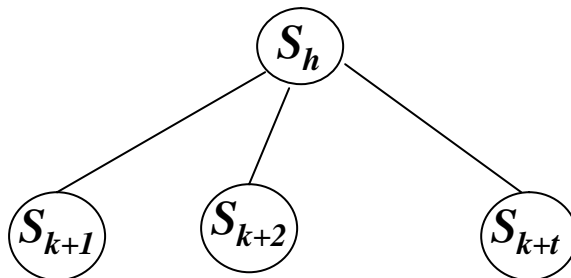
Branching

Per garantire la **correttezza** è necessario che

$$S_h = S_{k+1} \cup S_{k+2} \cup \dots \cup S_{k+t}$$

Per motivi di **efficienza** è consigliabile che

$$S_{k+i} \cap S_{k+j} = \emptyset \quad \forall i, j \text{ con } i \neq j$$



8

Bounding

Conosciamo il valore z di una soluzione ammissibile (la migliore)

Risolviamo in corrispondenza di ciascun nodo h un rilassamento che fornisce una soluzione x_h^R il cui valore b_h è una stima per difetto o per eccesso (*lower o upper bound*) di z_h^*

Test:

in S_h non ci sono soluzioni di valore migliore di z

se $z \leq b_h$ allora
il nodo h viene chiuso

N.B. problema di minimo

9

Caratteristiche del metodo

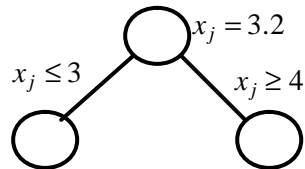
- (1) Calcolo delle stime b_h [*vedi lezione precedente*]
- (2) Strategia di *branching*
- (3) Strategia di ricerca
- (4) Analisi del nodo h

(2) Strategia di *branching*

- Su quale variabile fare branching: priorità
- come fare branching — partizione

Su variabile binaria [vedi esempio zaino]

Su variabile intera



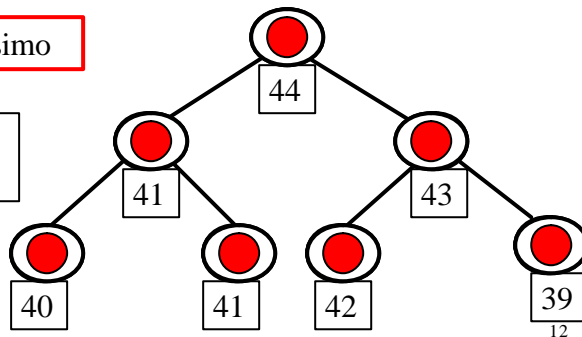
11

(3) Strategia di ricerca

- in parallelo (**breadth first search**)
- in profondità (**depth first search**)
- in base ai valori b_h (**best bound first search**)

Problema di massimo

Etichette:
Upper bounds



12

(4) Analisi del nodo h

4.i \nexists soluzioni ammissibili \Rightarrow nodo chiuso



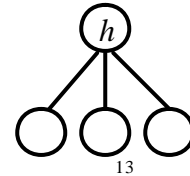
4.ii b_h è dominato da \mathcal{Z} \Rightarrow nodo chiuso



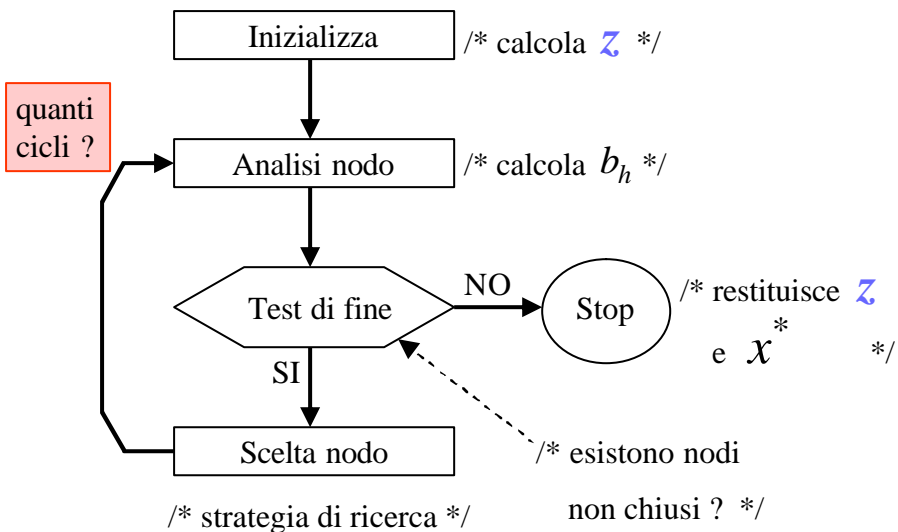
4.iii x_h^R è ammissibile \Rightarrow $\begin{cases} \text{aggiorna } \mathcal{Z} \text{ e } \mathcal{X}^* \\ \text{nodo chiuso} \end{cases}$



4.iv b_h non dominato e x_h^R non ammissibile \Rightarrow espandi il nodo



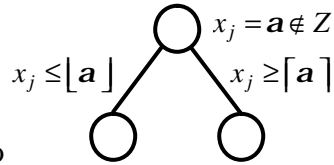
Struttura Algoritmo B&B



Branch & Bound per PLI

(1) Calcolo delle stime b_h : soluzione del rilassamento lineare

(2) Strategia di *branching* :



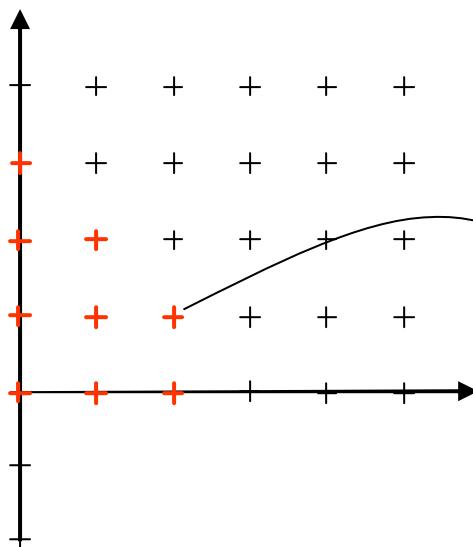
(3) Strategia di ricerca: in parallelo

(4) Analisi del nodo h



15

Esempio numerico

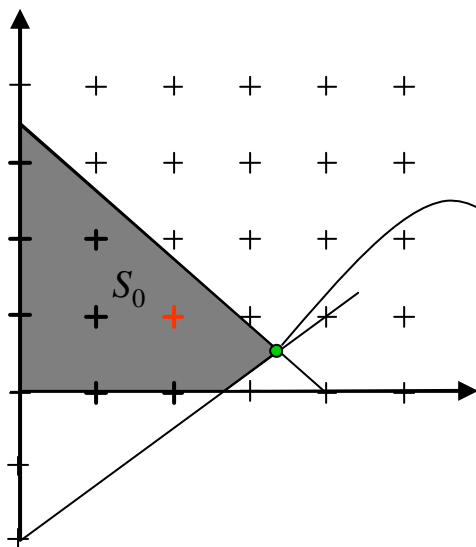


$$\begin{aligned} z^* &= \max 3x_1 + x_2 \\ 7x_1 + 8x_2 &\leq 28 \\ 3x_1 - 4x_2 &\leq 8 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

Punto di ottimo
 $x^* = (2,1)$ con
 $z^* = 7$

16

Rilassamento

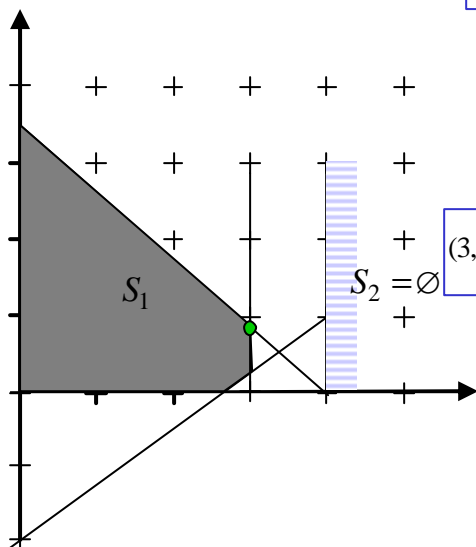


$$\begin{aligned} z^* &= \max 3x_1 + x_2 \\ 7x_1 + 8x_2 &\leq 28 \\ 3x_1 - 4x_2 &\leq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

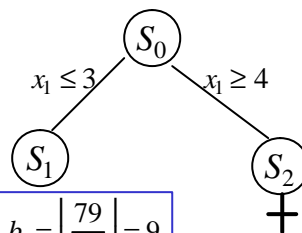
Punto di ottimo
 $x^{PL} = (\frac{44}{13}, \frac{7}{13})$ con
 $z^{PL} = \frac{139}{13}$

17

Partizione di S_0



$$(\frac{44}{13}, \frac{7}{13}) \quad b_0 = \left\lfloor \frac{139}{13} \right\rfloor = 10$$



$$(3, \frac{7}{8}) \quad b_1 = \left\lfloor \frac{79}{8} \right\rfloor = 9$$

18

